

Вариант 1

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = -6.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[4]{(-2+2i)^3}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin z = \frac{4}{3}i.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$а) D = \left\{ z : \frac{\pi}{2} < \arg(z-i) \leq \pi, |z-i| < 2 \right\};$$

$$б) D = \{ z : \operatorname{Re}(z+1) > 0, 0 < \operatorname{Im}(z+1) < 3 \}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$а) \operatorname{ch}(1+i); \quad б) \operatorname{Arcsin}(-2i).$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если

$$w = (z+i) \operatorname{ch} z.$$

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 2i$ при отображении

$$w = e^{-x}(\cos y - i \sin y).$$

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$u = x^2 - y^2, \quad f(-i) = -1.$$

9. Вычислите $\int_{\Gamma} e^z dz$, где Γ – ломаная с вершинами в точках $0; 1; 1+i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{z dz}{z^2 - 1}$, если

$$а) C = \left\{ z : |z-1| = \frac{1}{2} \right\}; \quad б) C = \{ z : |z+2| = 2 \};$$

$$в) C = \{ z : |z| = 2 \}.$$

11. Найдите по формулам Тейлора три первых члена разложения функции $f(z) = e^z \sin z$ по степеням z . Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$а) f(z) = \frac{1 - e^{(z+i)}}{z+i}, \quad z_0 = -i; \quad б) f(z) = \frac{\cos z - 1}{\sin^2 z - z^2}, \quad z_0 = 0;$$

$$в) f(z) = z \cos \frac{1}{z-2i}, \quad z_0 = 2i.$$

13. Найдите вычеты:

$$а) \operatorname{res}_{z=0} \frac{z - \sin z}{z^3}; \quad б) \operatorname{res}_{z=-1} \frac{e^z}{(z+1)^2};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=\infty} (z+2) \cos \frac{1}{z}; \quad г) \operatorname{res}_{z=i} \sin \frac{z}{z-i}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+4i}{z} \right)^n.$$

15. Разложите функцию в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}.$$

Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

в кольце $1 < |z| < 2$.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$, приняв центр ряда в точке $z_0 = 2$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$\text{а) } \oint_{|z-6|=5} \frac{z^2}{\sin z} dz; \quad \text{б) } \oint_{|z|=\frac{1}{2}} (z+2)e^{\frac{z}{2}} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}; \quad \text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5} \sin x + 3};$$

$$\text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}.$$

Вариант 2

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = \sqrt{3} + 3i.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[5]{-2+2i}.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$\text{а) } D = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}, z \cdot \bar{z} < 4 \right\};$$

$$\text{б) } D = \{ z : \operatorname{Re}(z-2i) > 1, 0 < \operatorname{Im}(z-2i) < \pi \}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$\text{а) } \sin \frac{2}{1-i};$$

$$\text{б) } \operatorname{Ln}(2i-2).$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$, $\operatorname{Re} w$, если

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = i$ при отображении $w = z^2 + 2z$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy)$, $f(0) = 0$.

9. Вычислите $\int_C (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz$, где C – ломаная с вершинами в точках $0; 1; 1+2i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{e^z dz}{z^2(z-2)}$, если

$$\text{а) } C = \left\{ z : |z| = \frac{1}{2} \right\}; \quad \text{б) } C = \left\{ z : |z-2| = \frac{1}{2} \right\};$$

$$\text{в) } C = \{ z : |z| = 3 \}.$$

11. Найдите первые три члена разложения функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ в ряд Тейлора по степеням z непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определить характер особых точек функций:

$$\text{а) } f(z) = \frac{1 - e^{2(z+2)}}{(z+2)}, \quad z_0 = -2;$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{\cos(z-1) - 1}{\sin^2(z-1) - (z-1)^2}, \quad z_0 = 1;$$

$$\text{в) } f(z) = z \cos \frac{1}{z+3}, \quad z_0 = -3.$$

13. Найдите вычеты:

$$\text{а) } \operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} z;$$

$$\text{б) } \operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3};$$

$$\text{в) } \operatorname{res}_{z=\infty} (z+2) \cos \frac{2}{z};$$

$$\text{г) } \operatorname{res}_{z=1} z^2 \cdot e^{\frac{1}{1-z}}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n}.$$

15. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ в окрестности точки $z = \infty$. Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}$ по степеням $(z-1)$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = -i$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$\text{a) } \oint_{|z-3|=3} \frac{e^{2z}}{(z^2-1)(z^2-4)} dz; \quad \text{б) } \oint_{|z|=\frac{1}{2}} z \cos^2 \frac{2}{z} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}; \quad \text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4\sqrt{5} \sin x + 9}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

Вариант 3

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = 2i.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[3]{\left(\sqrt{3} - \frac{1}{i}\right)^2}.$$

3. Решите уравнение

$$2\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$\text{а) } D = \left\{ z : \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}, |z| < 3 \right\},$$

$$\text{б) } D = \{ z : \operatorname{Im}(z+i) \geq 2, 0 < \operatorname{Re}(z+i) < \pi \}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$\text{а) } \operatorname{sh}\left(1 + \frac{\pi}{4}i\right); \quad \text{б) } \operatorname{Arccos}(-i).$$

6. Выделите $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$, если $w = e^{iz}$

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = -i$ при отображении $w = -iz^2$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$u = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x, \quad f(0) = 0.$$

9. Вычислите $\int_l e^{\bar{z}} dz$, где l – ломаная с вершинами в точках $0, i, 1 + i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{\cos z dz}{z\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3}$, если

$$\text{а) } C = \left\{ z : |z| = \frac{1}{2} \right\}; \quad \text{б) } C = \{ z : |z-2| = 1 \};$$

$$\text{в) } C = \{ z : |z| = 2 \}.$$

11. Найдите первые три члена разложения функции $f(z) = e^z$ в ряд Тейлора по степеням $\left(z - \frac{1}{2}\right)$ непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$\text{а) } f(z) = \frac{1 - e^{z-1}}{z-1}, \quad z_0 = 1; \quad \text{б) } f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2}, \quad z_0 = 0;$$

$$\text{в) } f(z) = \sin \frac{z}{z-2}, \quad z_0 = 2.$$

13. Найдите вычеты:

$$\text{а) } \operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sin z} \right); \quad \text{б) } \operatorname{res}_{z=i} \frac{z}{(z^2+1)^2};$$

$$\text{в) } \operatorname{res}_{z=1} z \exp \frac{2}{z-1}; \quad \text{г) } \operatorname{res}_{z=\infty} (z+2)^2 \sin \frac{1}{z}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|n|} z^n .$$

15. Разложите в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z} .$$

Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z = i$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} .$$

Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2} ,$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 0$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$а) \oint_{|z|=4} \operatorname{ctg} z \, dz ; \quad б) \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} z^2 \cos \frac{1}{z-1} \, dz .$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$а) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} ; б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{7} \sin x + 4} ; в) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x \, dx}{x^2+1} .$$

Вариант 4

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = \frac{1}{i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt{(1-i\sqrt{3})^3}.$$

3. Решите уравнение

$$\bar{z} = z^3.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$а) D = \left\{ z: \frac{\pi}{3} < \arg(z-i) \leq \frac{2}{3}\pi, \quad 1 \leq |z-i| < 2 \right\};$$

$$б) D = \{z: \operatorname{Re}(z+2i) > 0, \quad \operatorname{Im}(z+2i) < 0\}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$а) \ln\left(\frac{-1}{1+i}\right); \quad б) \operatorname{Arccos}(-2i+1).$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = \frac{1-z}{1+z}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1+i$ при отображении $w = iz^2$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = 2xy - \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad f(1+i) = -1+2i.$$

9. Вычислите $\int_{\Gamma} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz$, где Γ – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1+2i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{\sin^2 z dz}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}$, если

$$а) C = \{z: |z-2|=1\}; \quad б) C = \{z: |z|=1\};$$

$$в) C = \{z: |z|=2\}.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \cos z$ по степеням $\left(z + \frac{\pi}{4}\right)$. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$а) f(z) = \frac{1 - \cos(z+2i)}{(z+2i)^4}, \quad z_0 = -2i;$$

$$б) f(z) = \sin \frac{z}{z-3}, \quad z_0 = 3;$$

$$в) f(z) = \frac{e^{z+i} - 1}{z+i}, \quad z_0 = -i.$$

13. Найдите вычеты:

$$а) \operatorname{res}_{z=1} \frac{z-1 - \sin(z-1)}{(z-1)^3}; \quad б) \operatorname{res}_{z=-1} \frac{e^z}{z^2(z+1)^3};$$

$$в) \operatorname{res}_{z=\infty} (z-4)\cos \frac{3}{z}; \quad г) \operatorname{res}_{z=0} \left(\cos \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\right).$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z+1}{n+i}.$$

15. Разложите функцию $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$ в проколотой окрестности точки $z_0 = 3$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найти возможные разложения в ряд функции $f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$, приняв центр ряда в точке $z_0 = -1$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$\text{а) } \oint_{|z|=1} \frac{z}{16z^4 + 1} dz; \quad \text{б) } \oint_{|z|=2} \frac{1}{\sin^2 z} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^3}; \quad \text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3\sin x + 5}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 - 2x + 2}.$$

Вариант 5

1. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^2}.$$

2. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = -1 - i\sqrt{3}.$$

3. Решите уравнение

$$|z| - z = 1 + 2i.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$а) D = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \arg(z+1-i) \leq \frac{\pi}{2}, |z+1-i| < \sqrt{2} \right\};$$

$$б) D = \{ z : \operatorname{Re}(z) > 1, 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi \}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$а) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right); \quad б) \operatorname{Ln} \frac{1}{2i-2}.$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$, $\operatorname{Re} w$, если $w = \frac{1}{i(z-1)}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1+i$ при отображении $w = \frac{1}{z}$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $v = 2e^x \sin y$, $f(0) = 2$.

9. Вычислите $\int_l (z-|z|)dz$, где l – граница области $D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$.

10. Вычислите $\int_C \frac{\cos z}{z^2+4} dz$, если

$$а) C = \{z : |z-2i|=2\}; \quad б) C = \{z : |z+2i|=2\};$$

$$в) C = \{z : |z|=3\}.$$

11. Найдите первые три члена разложения функции

$$f(z) = \frac{1}{1+e^z} \text{ в ряд Тейлора по степеням } z \text{ непосредственным вычислением коэффициентов ряда.}$$

Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$а) f(z) = \frac{1-e^{(z-3)}}{(z-3)^3}, z_0 = 3; \quad б) f(z) = z \cos \frac{1}{z+2i}, z_0 = -2i;$$

$$в) f(z) = \frac{\cos(z+1)-1}{(z+1)^2}, z_0 = -1.$$

13. Найдите вычеты:

$$а) \operatorname{res}_{z=\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{\cos z}{z-\frac{3\pi}{2}} \right);$$

$$б) \operatorname{res}_{z=-1} \left(e^z + \frac{z^5}{(z+1)^3} \right);$$

$$в) \operatorname{res}_{z=\infty} \left((z-1) \cos \frac{2}{z} \right);$$

$$г) \operatorname{res}_{z=2} \left(\sin \left(\frac{z}{z-2} \right) \right).$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}.$$

15. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = z^2 \exp \frac{1}{z}$ в окрестности точки $z = \infty$. Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 1$ функцию $f(z) = \frac{1}{z-5}$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции $f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2}$, приняв центр ряда в точке $z_0 = 1$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$\text{a) } \oint_{|z-2|=2} \frac{\sin^2 z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3} dz; \quad \text{б) } \oint_{|z|=1} \left(z \cos \frac{1}{z} - e^{\frac{2}{z}} \right) dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}; \quad \text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{15 \sin x - 4}}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 10} dx.$$