

Вариант 6

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = 2 - 2i\sqrt{3}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^3}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$2\operatorname{sh}z - i = 0.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$\text{а) } D = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \arg(z + 3i) \leq \pi, |z + 3i| < 3 \right\};$$

$$\text{б) } D = \{ z : 1 < \operatorname{Re} z < 2, 0 < \operatorname{Im} z < 3x \}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$\text{а) } \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{1+i}\right); \quad \text{б) } \operatorname{Arccos}(-2i).$$

6. Найдите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = i \cos z$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = -2i$ при отображении

$$w = \frac{1}{z}.$$

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = 2(\operatorname{sh}x \operatorname{sin}y + xy), \quad f(0) = 3.$$

9. Вычислите $\int_L \frac{dz}{\sqrt{z}}$, если $L = \{ z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0, \sqrt{1} = 1 \}$.

10. Вычислите $\int_C \frac{ze^z dz}{z^2 + 1}$, если

$$\text{а) } C = \{ z : |z - i| = 1 \};$$

$$\text{б) } C = \{ z : |z + i| = 1 \};$$

$$\text{в) } C = \{ z : |z| = 2 \}.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \ln(1 + \cos z)$ в ряд Тейлора по степеням z . Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$\text{а) } f(z) = \frac{1 - e^{(z-3)}}{(z-3)^5}, \quad z_0 = 3;$$

$$\text{б) } f(z) = \frac{z + 2 - \sin(z+2)}{1 - \cos(z+2)}, \quad z_0 = -2;$$

$$\text{в) } f(z) = (z-1)\cos\frac{1}{z-1}, \quad z_0 = 1.$$

13. Найдите вычеты:

$$\text{а) } \operatorname{res}_{z=0} \frac{z - \frac{z^3}{6} - \sin z}{z^5}; \quad \text{б) } \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{z-i}}{(z-i)^3};$$

$$\text{в) } \operatorname{res}_{z=\infty} (z-2)\exp\frac{1}{z}; \quad \text{г) } \operatorname{res}_{z=1} \cos\frac{z}{z-1}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+2} \right)^n .$$

15. Разложите функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$$

в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z+2}\right)$$

по степеням $(z+2)$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 0$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$a) \oint_{|z|=4} \frac{1}{\sin z} dz; \quad б) \oint_{|z|=1} z^n \exp\left(\frac{2}{z}\right) dz .$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}; \quad б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{3} \sin x - 2}; \quad в) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+1)(x^2+9)} .$$

Вариант 7

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{3}-i}}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$a) D = \left\{ z : \frac{\pi}{2} < \arg(z-i) < \frac{3\pi}{4}, \quad 1 < |z-i| \leq 3 \right\};$$

$$b) D = \{ z : 4 < \operatorname{Re}(z+i) \leq 6, \quad \operatorname{Im}(z+i) < 2x+1 \}.$$

5. Представить в алгебраической форме число:

$$a) \operatorname{Arccos} i;$$

$$b) \operatorname{Ln} \left(\frac{1+i}{2} \right).$$

6. Найдите $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$ для функции $w = \sin z$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1+i$ при отображении

$$w = \frac{1}{z^2}.$$

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = 3x^2y - y^3 + y, \quad f(0) = 1.$$

9. Вычислите $\int_l \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где $l = \{ z : |z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0, \sqrt{1} = -1 \}$.

10. Вычислите $\oint_C \frac{z^2 e^z dz}{(z-1)^2(z+1)}$, где

$$a) C: |z-1| = \frac{1}{2}; \quad b) C: |z+1| = \frac{1}{2}; \quad c) C: |z|=2.$$

11. Найдите по формулам Тейлора первые три члена разложения функции $f(z) = \cos z$ по степеням $z + \frac{\pi}{4}$. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$a) f(z) = ze^{z+i}, \quad z_0 = -i; \quad b) f(z) = \frac{1 - \frac{(z-i)^2}{2} - \cos(z-i)}{(z-i)^4}, \quad z_0 = i;$$

$$c) f(z) = \frac{z}{(z+2)^3}, \quad z_0 = -2.$$

13. Найдите вычеты функций в указанных особых точках:

$$a) \operatorname{res}_{z=0} \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z}; \quad b) \operatorname{res}_{z=2} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2};$$

$$c) \operatorname{res}_{z=2} \frac{1}{z-2} \exp \frac{z}{z-2}; \quad d) \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{2z}{z^2+1}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}}.$$

15. Разложите в окрестности $z = \infty$ функцию $f(z) = \frac{1}{(z+3)^2}$. Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите функцию $f(z) = \exp \frac{z}{1-z}$ по степеням $(z-1)$. Найдите область сходимости полученного ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-2)},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 1$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах

$$\text{а) } \int_{|z-\pi i|=4} \frac{e^z}{e^z+1} dz; \quad \text{б) } \int_{|z|=1} \left(iz \cos \frac{1}{z} - e^{\frac{i}{z}} \right) dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}; \quad \text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\sqrt{6} \sin x - 5}; \quad \text{в) } \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz, \quad t > 0.$$

Вариант 8

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = -2\sqrt{3} + 2i.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[4]{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{i}\right)^3}$$

3. Решите уравнение

$$\sin z = \frac{5}{3}.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

$$\text{а) } D = \{z : \operatorname{Re}(iz) > 0, |z| < 1\};$$

$$\text{б) } D = \{z : \operatorname{Im}(z-1) \geq 3, -3 < \operatorname{Re}(z-1) < 2\}.$$

5. Запишите в алгебраической форме:

$$\text{а) } \operatorname{Arcsin}(i-1); \text{б) } \operatorname{Ln}(i+1)^i.$$

6. Выделите $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$, если $w = \frac{z-2}{z}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = -2i$ при отображении $w = \frac{1}{z^2}$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$u = x^3 - 3xy^2 + 2x,$$

$$f(0) = 0.$$

9. Вычислите $\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где $\Gamma = \{z : |z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0, \sqrt{1}=1\}$.

10. Вычислите $\int_C \frac{\operatorname{ch} z^2 dz}{(i-z)z^2}$, где

$$\text{а) } C = \left\{z : |z| = \frac{1}{2}\right\}; \quad \text{б) } C = \left\{z : |z-i| = \frac{1}{2}\right\};$$

$$\text{в) } C = \left\{z : |z| = \frac{3}{2}\right\}.$$

11. Найдите первые три члена разложения функции $f(z) = \sin(2z+1)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+1)$ непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$\text{а) } f(z) = \frac{1-e^z}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}, \quad z_0 = 0; \text{б) } f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}, \quad z_0 = 0.$$

13. Найдите вычеты:

$$\text{а) } \operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1} \right); \quad \text{б) } \operatorname{res}_{z=1} \left(z \sin \frac{2}{z-1} \right);$$

$$\text{в) } \operatorname{res}_{z=2i} \frac{e^{z^2}}{z(z-2i)^2}; \quad \text{г) } \operatorname{res}_{z=\infty} \left(2z \cos \frac{1}{z} \right).$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(z-i)^n}.$$

15. Разложите в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ функцию $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$. Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ в проколотой окрестности точки $z_0 = i$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-2)}$, приняв центр ряда в точке $z_0 = 0$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

a) $\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4 + 2z^2 + 1}$; б) $\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} z \sin \frac{4}{z-1} dz$.

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^4 + 1) dx}{x^6 + 1}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{6 - 4\sqrt{2} \sin x}$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x dx}{x^2 + 2x + 2}$.

Вариант 9

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = \frac{1-i}{2}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[3]{\frac{-1}{\sqrt{3}-i}}.$$

3. Решите уравнение

$$z^2 + |z| = 0.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \left\{ z : -\frac{\pi}{4} < \arg(z-2i+1) \leq \frac{3\pi}{4}, |z-2i+1| < 2 \right\};$$

б) Запишите неравенствами область D : полукруг радиуса 1 с центром в точке $z_0 = 1+i$, расположенный ниже прямой $y = 1$.

5. Запишите в алгебраической форме:

$$\text{а) } \operatorname{Ln} \frac{1}{\sqrt{3}+i}; \quad \text{б) } i^i.$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = \frac{1-z}{1+z}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1$ при отображении $w = z^3 - 6z$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$v = \cos x \cdot \operatorname{sh} y + 2y + 1, \quad f(0) = i.$$

9. Вычислите $\int_l z^2 \operatorname{Im} z \, dz$, где l – ломаная с вершинами в точках $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1+i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{\operatorname{sh} z \, dz}{(z^2+1)^2}$, если

$$\text{а) } C = \{z : |z-2i|=2\}; \text{ б) } C = \{z : |z+2i|=2\}; \text{ в) } C = \{z : |z|=2\}.$$

11. Найдите по формулам Тейлора три первых члена разложения функции $f(z) = \sin(2z+1)$ по степеням $\left(z + \frac{1}{2}\right)$. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$\text{а) } f(z) = e^z + \frac{z^5}{(z+1)^3}, \quad z_0 = -1; \quad \text{б) } f(z) = \frac{\cos z}{z - \frac{3\pi}{2}}, \quad z_0 = \frac{3\pi}{2};$$

$$\text{в) } f(z) = \cos\left(\frac{z}{z+4}\right), \quad z_0 = -4.$$

13. Найдите вычеты:

$$\text{а) } \operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos z - 1}{z \sin z}; \text{ б) } \operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2};$$

$$\text{в) } \operatorname{res}_{z=\infty} (z-4) \cos \frac{1}{z^2}; \text{ г) } \operatorname{res}_{z=-2i} \sin \frac{z}{z+2i}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+3i}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z+3i} \right)^n.$$

15. Разложите функцию

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите функцию $f(z) = \cos^2 z + \operatorname{ch}^2 z$ по степеням z . Найдите область сходимости полученного ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = i$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$\text{а) } \oint_{|z-1|=1} \frac{e^{2z}}{z^3-1} dz; \text{ б) } \oint_{|z|=2} z \exp\left(\frac{2}{z+1}\right) dz.$$

19. Вычислить интегралы с помощью вычетов:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2}; \text{ б) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-\sqrt{7} \sin x}; \quad \text{в) } \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\operatorname{ch} zt dz}{(z+1)(z+2)} \quad t > 0.$$

Вариант 10

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = -8 + \frac{8}{i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[5]{(-\sqrt{3} + i)^4}.$$

3. Решите уравнение

$$\cos z = \operatorname{ch} z.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \left\{ z : 0 < \arg(z-1-i) \leq \frac{\pi}{2}, |z-1-i| < \sqrt{5} \right\};$$

б) запишите неравенствами область: полукруг радиуса 1 с центром в начале координат, расположенный выше оси Ox .

5. Запишите в алгебраической форме:

$$\text{а) } (-2i)^i; \quad \text{б) } \operatorname{Ln}(\sqrt{3}i + 1).$$

6. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1 - \frac{i}{2}$ при отображении $w = \ln(2z - i)$.

7. Выделите $\operatorname{Im} w$, $\operatorname{Re} w$, если $w = |z| + iz$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $u = \cos x \operatorname{ch} y$, $f(0) = 1$.

9. Вычислите $\int_l z \operatorname{Re} z^2 dz$, где l – полуокружность $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.

10. Вычислите $\int_C \frac{e^{-z} dz}{z^2(z^2+1)}$, если

$$\text{а) } C: |z| = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } C: |z-i| = \frac{1}{2}; \quad \text{в) } C: |z| = \frac{3}{2}.$$

11. Найдите три члена разложения функции $f(z) = e^{\sin z}$ в ряд Тейлора по степеням z непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определить характер особых точек функций:

$$\text{а) } f(z) = \frac{1 - e^{(z-i)}}{(z-i)^4}, \quad z_0 = i; \quad \text{б) } f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z+2}, \quad z_0 = -2;$$

$$\text{в) } f(z) = \frac{\cos(z+1) - 1}{2(z+1)^2}, \quad z_0 = -1.$$

13. Найдите вычеты:

$$\text{а) } \operatorname{res}_{z=0} \frac{5z^2}{1 - \cos z}; \quad \text{б) } \operatorname{res}_{z=1} \frac{\sin z \pi}{(z-1)^3};$$

$$\text{в) } \operatorname{res}_{z=\infty} (z+2) \cos \frac{1}{z}; \quad \text{г) } \operatorname{res}_{z=0} z^n e^{\frac{1}{z}}.$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1-i}{2i} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-4i}{z-1-i} \right)^n.$$

15. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$ в окрестности точки $z = \infty$. Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = -1$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^2}.$$

Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = 2$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

а) $\oint_{|z|=1} \operatorname{tg} z \pi dz$;

б) $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$.

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-x+2)dx}{x^4+10x^2+9}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2\sqrt{2}\sin x}$; в) $\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{2z} dz}{(z^2-1)^2}$.