2. $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ — монотонно возрастает.

Д-во:

По формуле Бинома Ньютона

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}C_n^1 + \frac{1}{n^2}C_n^2 + \ldots + C_n^n\frac{1}{n^n} = \left| C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right|$$

$$= 2 + \frac{1}{n^2}\frac{n!}{(n-2)!\,2!} + \frac{1}{n^3}\frac{n!}{(n-3)!\,3!} + \ldots + \frac{1}{n^n}\frac{n!}{n!} =$$

$$= 2 + \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)\cdot n}{2!} + \frac{1}{n^3}\frac{(n-2)(n-1)n}{3!} + \ldots + \frac{n!}{n^n\,n!} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4!}\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = x_n$$

Сравним второе слагаемое для x_n и x_{n+1}

x_n	x_{n+1}
$\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$\Rightarrow$ $x_{n+1} > x_n$ по второму слагаемому.

Сравним третье слагаемое

x_n	x_{n+1}
$\frac{1}{3!}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$	$\frac{1}{3!}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$\Rightarrow$ $x_{n+1} > x_n$ по третьему слагаемому

Аналогично по 4, 5 и т.д. всем слагаемым

Т.о. $x_{n+1} > x_n \Rightarrow x_{n+1} - x_n > 0 \Rightarrow$

последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает.

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+2x^3+x-4}{x^2-4x+3} = \left|\dfrac{0}{0}\right|$ Выделим в числителе и знам. множитель $(x-1)$

$$\begin{array}{l|l} x^4+2x^3+x-4 & x-1 \\ \hline x^4-x^3 & x^3+3x^2+3x+4 \\ \quad 3x^3+x^2+x & \\ \quad 3x^3-3x^2 & \\ \quad\quad 3x^2+x & \\ \quad\quad 3x^2-3x & \\ \quad\quad\quad 4x-4 & \\ \quad\quad\quad 4x-4 & \\ \quad\quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3+3x^2+3x+4)}{(x-1)(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2+3x+4}{x-3} = -\frac{11}{2}$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-x^3+5}{x^2-4} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$ по теореме об эквивалентных бесконечно больших:

$$x^4-x^3+5 \underset{x\to\infty}{\sim} x^4$$

$$x^2-4 \underset{x\to\infty}{\sim} x^2$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^2} = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \infty \end{array} \right\} = \infty$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^{2x-1} = \left|1^\infty\right| = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-1+1+4}{3x-1}\right)^{2x-1} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{5}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{5}}}_{=e}{}^{\cdot\frac{5}{3x-1}\cdot 2x-1} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{5(2x-1)}{3x-1}} = e^{\frac{10}{3}}$$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x - \sin x}{x^2 \sin x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^2 \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\frac{x^2}{4}}{x^2\cos x} = \frac{1}{2}$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = |\infty - \infty| = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|+x} = \begin{cases} -\infty, & x\to-\infty \\ \frac{1}{2}, & x\to+\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists$$

9 $\alpha = e^{x^4} - 1$

$\beta = x$ $\quad x \to 0$ $\quad$ по опр. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \begin{cases} 0, & \alpha \ll \beta \\ \infty, & \alpha \gg \beta \\ const, & \alpha \sim \beta \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4}-1}{x^k} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^k} = const \quad \text{при } k = 4 \Rightarrow$$

$\alpha = e^{x^4} - 1$ – б.м. 4-го порядка малости относительно x.

10. $y = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{-x-3}}}$ $\quad$ точка, подозрительная на разрыв, $x_0 = -3$

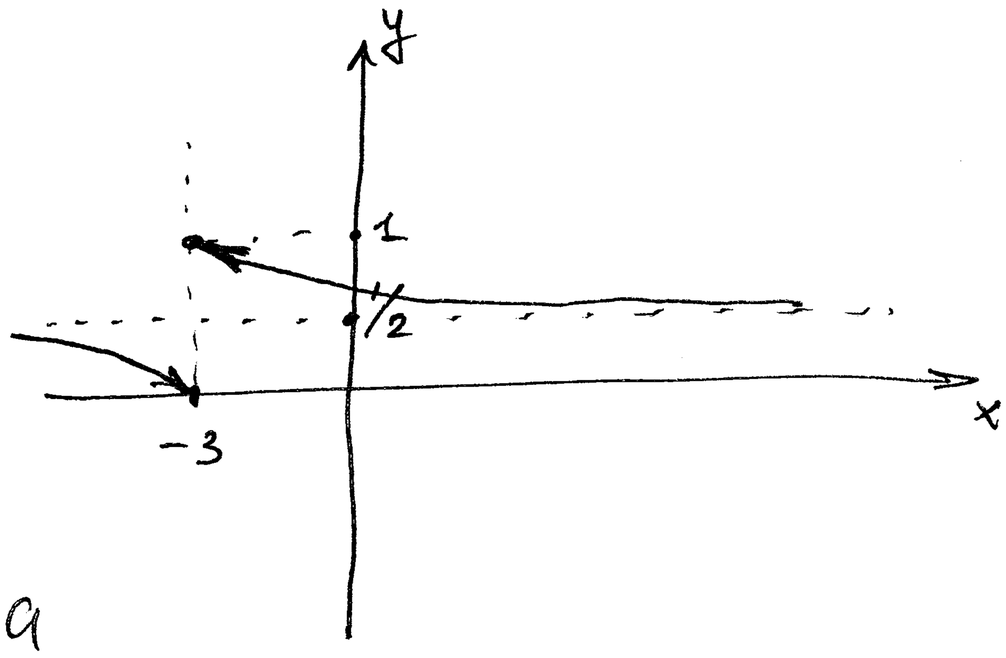
1) $$\lim_{x\to -3+0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{-x-3}}} = \lim \frac{1}{1+2^{\frac{1}{-(-3+0)-3}}} = \lim \frac{1}{1+2^{\frac{1}{-0}}} =$$

$$= \lim \frac{1}{1+2^{-\infty}} = \boxed{1} \text{ – справа}$$

2) $$\lim_{x\to -3-0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{-x-3}}} = \lim \frac{1}{1+2^{\frac{1}{-(-3-0)-3}}} = \lim \frac{1}{1+2^{\frac{1}{0}}} =$$

$$= \lim \frac{1}{1+2^{\infty}} = 0 \text{ – слева}$$

3) $$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{-x-3}}} = \lim \frac{1}{1+2^{0}} = \frac{1}{2}$$



Т.О. $x_0 = -3$ – точка разрыва I рода – скачек

$$\lim_{x\to -3+0} y(x) \neq \lim_{x\to -3-0} y(x) = const.$$

(8)

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)\right)^{\frac{1}{\ln[1+tg^2(5x)]}} = \lim_{x\to 0}\left(1-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)^{\frac{1}{\ln[1+(5x)^2]}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x^2}{9}\right)^{\frac{1}{25x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{-x^2}{9}\right)^{\frac{9}{-x^2}}\right)^{\frac{-x^2}{9}\cdot\frac{1}{25x^2}} =$$

$$= e$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{-\frac{x^2}{25\cdot 9\cdot x^2}} = e^{-\frac{1}{225}}$$